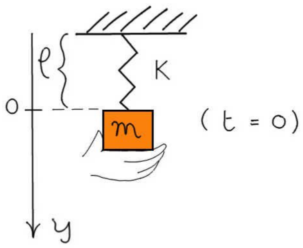
lorenzo.galante@polito.it



Una massa è collegata a una molla di costante elastica k come mostrato in figura. All'istante t = 0 la molla è in condizione di riposo e la massa è in quiete sostenuta da una mano. Supponendo che nello stesso istante la mano sia tolta, quale tra le seguenti è l'equazione differenziale che descrive il moto della massa?

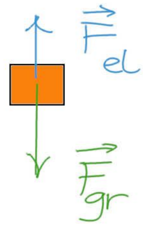
1. $mg - ky = m\ddot{y}$
2. $-ky = m\ddot{y}$
3. $mg - k(y - \ell) = m\ddot{y}$
4. $k(y - \ell) = m\ddot{y}$

Scriviamo la 2ª eqz. di Newton per il corpo:

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$$

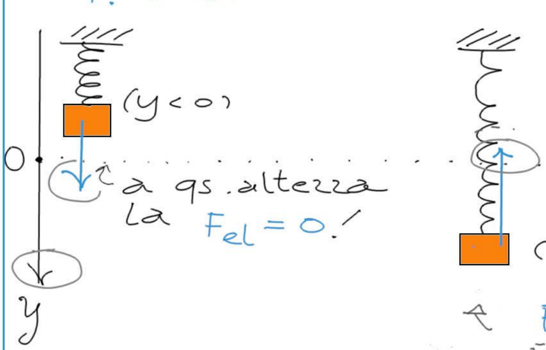
Il moto è 1D ⇒ lungo asse y (posso lavorare senza vettori).

Considero le forze che agiscono sul corpo lungo asse y ...



occhio ai segni con cui le forze vanno inserite nell'equazione:

1. $\vec{F}_{el}$.

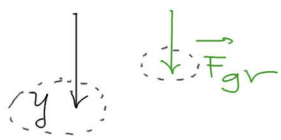


a qs. altezza la $F_{el} = 0$!

F_{el} concorde asse y ⇒ deve essere positiva ⇒ $-k\underbrace{y}_{(<0)}$

F_{el} discorde rispetto asse y ⇒ deve essere negativa ⇒ $-k\underbrace{y}_{(>0)}$

2. $\vec{F}_{gr}$ è forza costante, sempre diretta verso il basso.
Il suo verso è concorde all'orientamento del sist. di riferimento...



⇒ nell'equazione deve comparire come una forza > 0 ⇒ + mg

→ l'espressione $-ky$ esprime il corretto orientamento di F_{el} in entrambi i casi.

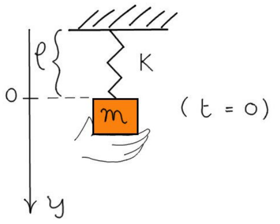
L'equazione $\sum \vec{F}_i = m\ddot{y}$ diventa

$$\boxed{mg - ky = m\ddot{y}}.$$

Essa dipende da orientamento sist. riferimento: ↓y

POLITECNICO DI TORINO

PL@h lorenzo.galante@polito.it



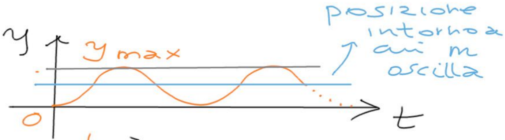
Prima di entrare nella Matematica della soluzione dell'equazione DIFFERENZIALE
... posso fare alcune considerazioni fisiche!

1. Cosa capita se tolgo la mano? la m inizia a oscillare. Mi aspetto moto armonico con certa ω. La ω è decisa dalla K della molla e dalla m.

2. la m non oscillerà intorno a posizione $y = 0$: questa sarà la posizione + bassa che m assumerà

ricorda che asse y è orientato così $y \downarrow$

3. Posso già pensare che la legge oraria $y(t)$ che otterrò sarà di questo tipo



↳ è un moto armonico (consideraz. n° 1), tra $y=0$ e y_{max}.

Risolviamo l'equazione.

$$\underbrace{mg - ky}_{\bar{y}} = m\ddot{y}$$

→ mi aspetto moto armonico, quindi equazione del tipo ($-kx = m\ddot{x}$).

→ se pongo $mg - ky = \bar{y}$ (l'equazione si trasforma...)

... $\dot{\bar{y}} = -k\dot{y}$

$\ddot{\bar{y}} = -k\ddot{y}$ ⇒ la "nuova" equaz. diventa

$$\boxed{\bar{y} = -\frac{m}{k}\ddot{\bar{y}}} \rightarrow m\ddot{\bar{y}} = -k\bar{y}$$

ecco l'equazione "tipo" moto armonico che mi aspettavo.

Soluz. tipica moto arm.:

$\bar{y} = A\cos(\omega t + \varphi)$ con $\omega = \sqrt{k/m}$.

! Volendo posso individuare la y intorno a cui m oscillerà. Nel moto armonico classico ($-kx = m\ddot{x}$) l'oscillazione è intorno a $x=0$. Adesso sarà intorno a $\bar{y} = 0 \Rightarrow y = \frac{mg}{k}$

Determino A e φ usando le condizioni iniziali:

I) m è ferma in $t=0$ ⇒ $\dot{y}(0) = 0$,

$\dot{\bar{y}}(0) = -k\dot{y}(0) = 0 = -A\omega\sin(\varphi)$

⇒ $\boxed{\varphi = 0}$

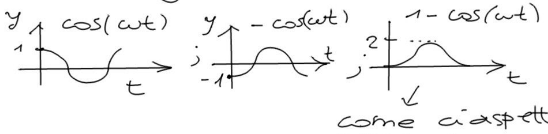
II) m in $t=0$ è in $y=0$ ⇒

$y(0) = 0$ ⇒ $\bar{y}(0) = mg$

$\boxed{A = mg}$

$\bar{y} = mg \cdot \cos(\omega t)$ ⇒ $mg - ky = mg \cdot \cos(\omega t)$ ⇒

$$\boxed{y(t) = \frac{mg}{k} \cdot (1 - \cos\omega t)}$$



come ci aspettavamo!