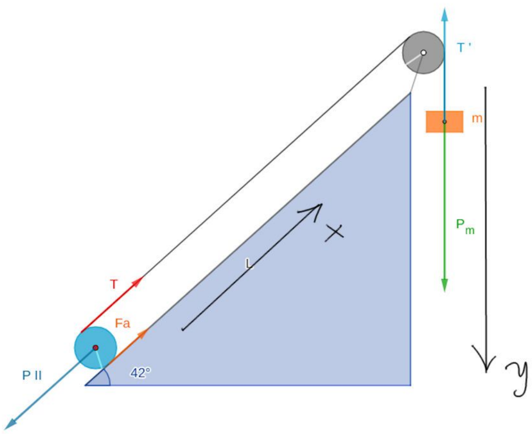
POLITECNICO DI TORINO

PL@h lorenzo.galante@polito.it

Un cilindro pieno omogeneo di massa M e raggio R è posto sopra un piano scabro inclinato di un angolo θ. Una fune inestensibile e di massa trascurabile è avvolta attorno al cilindro, passa su una carrucola fissa, anch'essa assimilabile ad un cilindro di massa M e raggio R. La fune sostiene un cubo di massa m inizialmente mantenuto fermo a distanza h dal terreno. Al tempo $t = 0$ esso viene rilasciato e comincia a scendere, trascinando il cilindro verso l'alto. Si supponga che il cilindro si muova di moto di puro rotolamento e che la fune non scivoli né sul cilindro, né sulla carrucola.

- Determinare il rapporto tra l'accelerazione a_m del cubo di massa m e l'accelerazione a_M del cilindro. (2 punti)
- Determinare l'accelerazione a_m con cui si muove il cubo dopo esser stato rilasciato, in funzione degli altri dati noti (8 punti)
- Trovare il minimo valore che deve avere la massa m per far salire il cilindro lungo il piano. (2 punti)
- Usando considerazioni energetiche, trovare la velocità con cui il cubo arriva a terra. (3 punti)

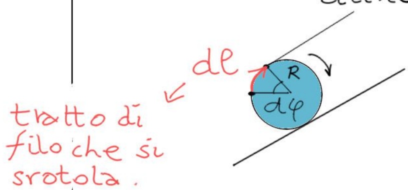


PERCHÉ LA MASSA m SCENDE LUNGO y.

La massa m si muove lungo y per due ragioni:

I. Il cilindro blu rotola
⇒ il filo avvolto su di esso si srotola.

$d\varphi$ = angolo di rotaz. del cilindro



$d\ell = R\,d\varphi$

II. Per effetto della medesima rotazione $d\varphi$ del cilindro il cilindro avanza lungo il piano inclinato di un tratto pari a $d\ell$

VEL. E ACCELERAZIONE DI m.

La rotazione $d\varphi$ del cilindro genera uno spostamento della massa m:

$$dy = 2\cdot d\ell = 2R\,d\varphi$$

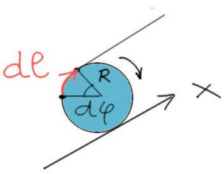
$$\Rightarrow v_m = \frac{dy}{dt} = 2R\omega$$ vel. ang. cilindro

$$\Rightarrow a_m = \frac{dv_m}{dt} = 2R\alpha$$ acc. ang.

SOLUZIONE punto 1

$$\boxed{a_m = 2\cdot a_M}$$

VEL. E ACCELERAZIONE DI M.



La rotazione $d\varphi$ del cilindro fa avanzare il centro di massa di un tratto $dx = d\ell$:

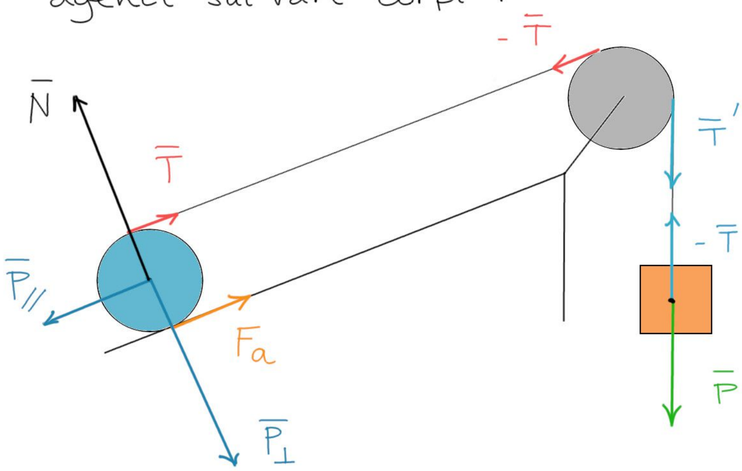
$$v_M = \frac{dx}{dt} = R\cdot\omega\ ,$$

$$a_M = \frac{dv_M}{dt} = R\cdot\alpha\ .$$

lorenzo.galante@polito.it

Per trovare a_m scriviamo le equazioni della dinamica del CILINDRO, della CARRUCOLA e della MASSA m.

Prima delle equazioni è bene rappresentare le forze agenti sui vari corpi:



CILINDRO

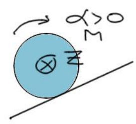
1ª equaz. cardinale $\left(\vec{F}^{(ext)}_{Ris.} = M \cdot \vec{a}_{c.m.}\right)$:

$$\boxed{T + F_a - Mg\sin\vartheta = M a_M}$$

(Traslazione centro di massa)

(in direz. ⊥ piano inclinato le forze si bilanciano).

2ª equaz. cardinale (scelgo asse z entrante in modo che $\alpha > 0$ se $a_M > 0 \equiv$ cilindro sale).

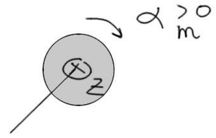


$$TR - F_a R = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \alpha_M = \frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}\frac{a_M}{\cancel{R}},$$

$$\boxed{T - F_a = \frac{1}{2}M a_M}$$

CARRUCOLA

2ª equaz. cardinale



(questa acc. ang. è legata all'acc. della m. È la metà della α_M)

$$T' R - T \cdot R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_m = \frac{1}{2}MR\, a_m \quad (a_m = 2a_M)$$

$$\boxed{T' - T = M a_M}$$

MASSA m

(asse y orientato verso il basso)

$$\downarrow y \qquad mg - T' = m\, a_m = 2m a_M$$

$$\boxed{mg - T' = 2m a_M}$$

Mettendo a sistema le 4 equazioni della dinamica (4 eq.ni & 4 incognite: T, T', F_a, a_M) troviamo:

$$a_M = \frac{4m - 2M\sin\theta}{7M + 8m} \cdot g \,,$$

$$a_m = 2 \cdot a_M \,.$$

Valore minimo di m che fa salire il cilindro:

Fissata la massa M del cilindro e l'angolo θ del piano inclinato, il valore della massa m determina le accelerazioni del sistema.

- Se $m > m_{soglia}$ le acc.ni sono > 0 (cilindro acc. verso l'alto, m verso il basso).
- Se $m < m_{soglia}$ le acc.ni sono < 0.
- Se $m = m_{soglia}$ $\boxed{a_m = a_M = 0}$.

questa è la condizione da imporre.

Imponendo la condizione $a_m = 0$ si ottiene

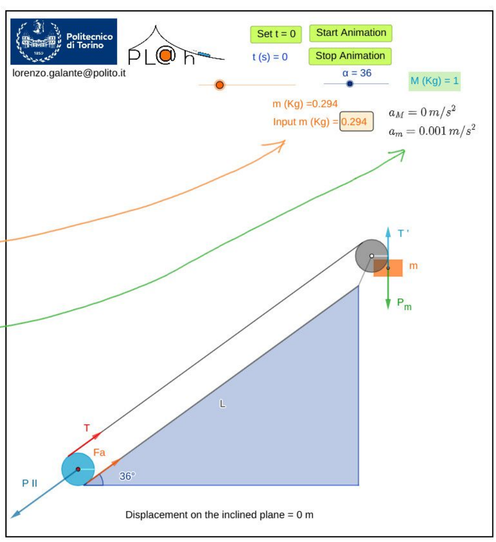
$$m_{Soglia} = \frac{1}{2} M \cdot \sin\theta$$

Puoi "sperimentare" questo usando l'applicazione →

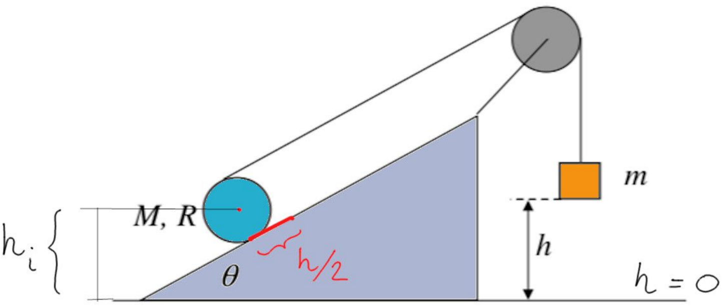
... $\theta = 36°$ $M = 1\ kg$

... impostando la m_{Soglia} calcolata l'applic.ne restituisce le acc.ni

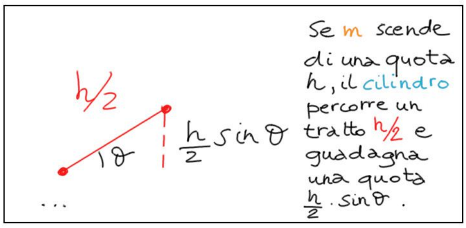
(con un errore di arrotondamento sulla 3ª cifra decimale).



lorenzo.galante@polito.it



CILINDRO



(!) La forza di attrito $\bar{F}_a$ che garantisce il rotolamento puro è di tipo STATICO!
(Non c'é scorrimento relativo tra cilindro e piano inclinato).
Quindi F_a non compie lavoro $\Rightarrow$
Il sistema è conservativo.
(vale principio conservazione dell'energia Meccanica). $\rightarrow$ $\boxed{E_{in} = E_{fin}}$

$$mgh + Mgh_i = 0 + Mg\left(h_i + \frac{h}{2}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}I\omega_m^2 + \frac{1}{2}I\omega_M^2$$

$\frac{1}{2}mv_m^2$: cinetica traslazionale massa m

$\frac{1}{2}I\omega_m^2$: cinetica rotazionale carrucola.

$\frac{1}{2}I\omega_M^2$: cinetica rotazionale cilindro

con
$$v_M = v_m/2$$
$$\omega_M = \omega_m/2$$
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Esprimendo v_M, ω_m e ω_M in funzione di v_m si ottiene:

$$\boxed{v_m^2 = \frac{16\left(m - \frac{1}{2}M\sin\theta\right)}{8m + 7M} \cdot gh}$$