## POLI-Lab @ home

## Il piano inclinato

#### Presentazione del Progetto Poli-Lab @ home

Il progetto nasce per dare la possibilità di stabilire, anche da casa, il fondamentale contatto tra quanto si apprende dal punto di vista teorico e quanto accade in natura. In poche parole per dare la possibilità agli studenti del Politecnico di Torino, o a chiunque ne abbia il piacere e il desiderio, di fare esperimenti che si affianchino a quelli proposti in sede, all'interno dei Laboratori. Siamo, infatti, profondamente convinti che laddove si stabilisca la relazione tra teoria e fenomeno naturale si abbia la possibilità di comprendere la Fisica ad un livello più alto.

Mettere in piedi, un progetto di questo tipo ha richiesto flessibilità e una certa dose di creatività. Potrete rendervi conto di ciò leggendo gli esperimenti proposti e realizzandoli in ambienti informali ...come ad esempio la vostra stanza.

Ci farebbe grande piacere, se voi, studenti, consideraste questo progetto come un'opportunità. Uno stimolo alla flessibilità, al pensiero critico e alla creatività. Saremmo felici se prendeste sul serio gli esperimenti che i vostri docenti vi suggeriranno di fare, perché quel che vi staranno proponendo è di "giocare" con le leggi di natura. Dovrete affrontare e risolvere piccoli imprevisti, sforzatevi di superarli con ingegno e creatività. Siete parte del processo formativo proposto dall'Ateneo, quindi vi chiediamo di darci suggerimenti e spunti per migliorare gli esperimenti proposti e di produrre un video di 1 o 2 minuti, che vi riprenda all'opera con il vostro apparato sperimentale e ci mostri i risultati che avete ottenuto. Potete inviarci le vostre idee e il link al video compilando il form che trovate sul sito alla pagina dell'esperimento. Buon Lavoro!

#### Menu delle attività

#### 1. Determinazione dell'accelerazione con Tracker.

[Singolo studente] *Breve descrizione*. Si realizza un video di un oggetto che scivola su un piano inclinato e si effettua un'analisi del moto con il software gratuito "Tracker". Sempre nel framework del software Tracker si effettua un fit parabolico dei dati x(t) e si ricavano l'accelerazione del corpo, l'accelerazione di attrito e le loro incertezze assolute.

# 2. Determinazione dell'accelerazione e del coefficiente di attrito dinamico con il metodo dei minimi quadrati.

[Singolo studente] *Breve descrizione*. Agendo sui dati raccolti con Tracker, si cerca la retta che meglio si adatta ai dati sperimentali rappresentati su un piano  $(t^2, x)$ . Dai parametri della retta si ricavano l'accelerazione del corpo e il coefficiente di attrito dinamico. Si valuta l'incertezza delle grandezze stimate.

#### Materiale necessario.

#### Materiale Necessario

- Un piano inclinato (un banco da inclinare, un asse in formica o in legno, ...)
- 1 corpo da far scivolare su di esso
- Smartphone con applicazione "livella a bolla" per misurare l'angolo di inclinazione
- Sotware gratuito "Tracker" (physlets.org/tracker/) compatibile con i seguenti sistemi operativi: Windows, OS X, Linux-32 e 64 bit.
- 1 PC con un folgio di calcolo (Excel, Libre Office, ...).
- 1 metro estensibile (sensibilità 1mm).

#### Attività 1. Determinazione dell'accelerazione con Tracker.

Si determina l'accelerazione di un corpo che scivola su un piano inclinato attraverso una ripresa video del moto e l'analisi del filmato con il software Tracker. Nota l'accelerazione e l'angolo di inclinazione del piano, si determina l'accelerazione di attrito.

Nella fase di preparazione del proprio apparato sperimentale è bene tener presente i principali gradi di libertà su cui poter agire per definirne le condizioni di funzionamento:

- 1. La **massa del corpo** avrà un ruolo importante nel determinare l'accelerazione di attrito, corpi leggeri avranno minor attrito (a parità di inclinazione)
- 2. L'angolo di inclinazione influenzerà sia la componente dell'accelerazione di gravità lungo il piano, sia l'accelerazione d'attrito. Aumentando l'angolo la componente di g lungo il piano aumenterà, quella perpendicolare al piano (e quindi l'accelerazione di attrito) diminuirà.

### Attività 1. Come realizzare l'esperimento.

• Si realizza un piano inclinato (inclinando un banco, una mensola, un asse,...).



- Nella scelta dell'angolo di inclinazione tenere presente che un moto eccessivamente veloce renderà meno preciso il tracciamento della posizione nei vari fotogrammi del video.
- Un modo possibile per determinare l'inclinazione è il seguente: si aumenta l'angolo fino a superare di poco l'inclinazione che consente alla componente della forza peso lungo il piano di superare la forza di attrito statico massima. In tal modo, quando il corpo verrà rilasciato con velocità iniziale nulla, comincerà a scivolare senza bisogno di interventi dall'esterno.
- Si misura la lunghezza del piano inclinato che sarà la lunghezza  $d_{rif}$  di riferimento che consentirà al software di analisi di convertire lunghezze da pixel a metri.
- Nella scelta del luogo ove posizionare l'apparato, se possibile, scegliere un luogo che consenta di avere uno sfondo di colorazione uniforme, con tonalità di colore in contrasto con quelle del corpo che scivolerà.

- Ci si pone a lato del piano inclinato e si imposta la videocamera di uno smartphone o di un tablet per riprendere il moto del corpo.
- Porre l'obiettivo della camera circa all'altezza del punto medio del tragitto del corpo.
- Bisogna avere cura di riprendere l'intero piano inclinato, visto che la sua lunghezza sarà di riferimento per Tracker. Per minimizzare gli errori relativi sulle distanze è inoltre consigliato di fare in modo che il piano inclinato rappresenti un'alta percentuale delle dimensioni dell'inquadratura.
- Prima di far scendere il corpo lungo il piano, misurarne l'angolo di inclinazione. Per esempio con un applicazione "livella a bolla". Si pone il cellulare lungo il piano inclinato con i due orientamenti opposti e si valuta la media degli angoli misurati.



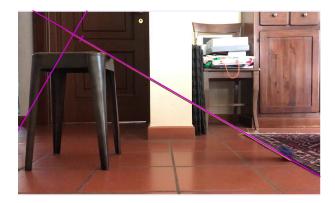
- In alternativa si misurano la lunghezza del piano e il cateto orizzontale e si valuta l'angolo di inclinazione tramite le formule trigonometriche per i triangoli rettangoli.
- Si pone il corpo alla sommità del piano inclinato e lo si lascia libero di scivolare verso il basso con partenza da fermo.
   Si filma la discesa del corpo. Bisognerà farsi aiutare da una seconda persona.



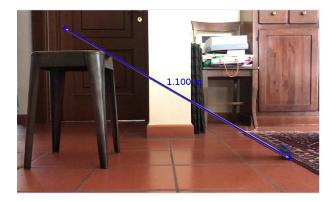
### Attività 1. L'Analisi con Tracker

Per avere una guida passo passo dell'analisi si può consultare il VIDEO5 in cui una vera e propria analisi è commentata e ripresa. Qui presentiamo le linee generali del procedimento.

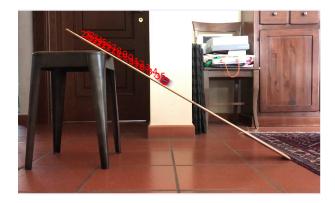
• Per consentire al software di determinare la posizione (x, y) del corpo si definisce un sistema di riferimento cartesiano. Lo si orienta in modo che l'asse delle ascisse sia diretto lungo il piano inclinato e si pone l'origine nella posizione iniziale del corpo.



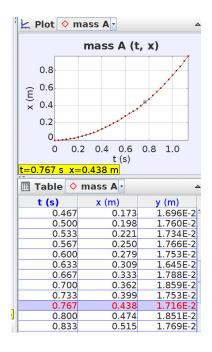
• Si definisce la lunghezza di riferimento  $d_{rif}$  che consenta al software di convertire in metri distanze misurate in unità di pixel.



• Si traccia la posizione del corpo nei fotogrammi della discesa.



• A mano a mano che si traccia la posizione del corpo, Tracker offre sia i dati numerici sia il grafico della funzione x(t).



• Si determina l'accelerazione del moto del corpo cercando di fittare i dati sperimentali con una funzione parabolica del tipo

$$x(t) = At^2 + Bt + C \tag{1}$$

.

 Si apre la finestra di analisi offerta da Tracker (View / Data Tool (Analyze)) e si effettua il fit tra parabola e punti sperimentali.
 Questa operazione viene condotta variando i valori dei parametri A, B, C con delle freccette "cliccabili" che consentono anche di effettuare variazioni molto fini. In tempo reale l'utente vede la parabola modificarsi in base alle variazioni introdotte e aderire sempre meglio ai punti sperimentali.

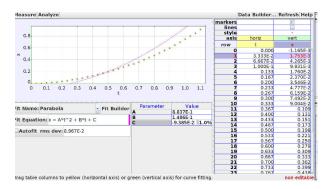


Figure 1: Adattameto della parabola ai punti sperimentali.

Durante l'operazione di fit occorrerà tener presente che il nostro corpo parte da una posizione  $x_0 = 0$  e da fermo. Dunque i parametri B e C potranno essere impostati direttamente e fissati a zero. In altri termini la parabola con cui cercheremo di modellare i dati sperimentali sarà del tipo:

$$x = At^2. (2)$$

Terminata l'operazione di fitting, avremo a disposizione il valore del parametro A (le cui dimensioni sono  $m/s^2$ ) e da esso potremmo ricavare l'accelerazione del corpo:

$$a = 2A. (3)$$

Dal valore dell'angolo di inclinazione possiamo stimare la componente dell'accelerazione di gravità lungo il piano inclinato. Infine, sottraendo a quest'ultima l'accelerazione a del corpo, possiamo ricavare l'accelerazione dovuta all'attrito, orientata nel verso opposto a quello del moto:

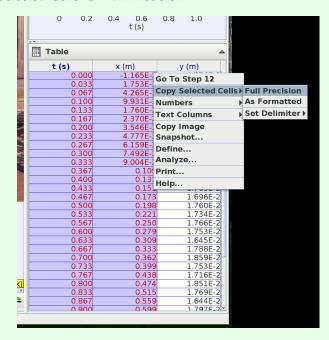
$$a_{attr.} = g \cdot sin\theta - a$$
. (4)

#### Attività 1. Determinazione delle incertezze.

Per stimare l'incertezza sull'accelerazione a, possiamo seguire la seguente procedura.

#### Attività 1. Stima della incertezza su a.

• Dalla finestra principale di Tracker, sotto il grafico x(t), selezionare le colonne dati complete di tempo e posizione. Poi cliccando su di esse con tasto destro selezionare "Copy Selected Cells" e "Full Precision".



- Aprire un foglio di calcolo (Excel, Libre Office, ...) e incollare le colonne dati copiate.
- Stiamo assumendo che l'equazione del moto sia

$$x = \frac{1}{2}at^2\tag{5}$$

dunque, valutando per ogni coppia di dati (t, x) la grandezza  $2x/t^2$  avremo numerose stime dell'accelerazione del corpo durante il moto.

• Creare nel proprio foglio di calcolo, al fianco della colonna delle x, una nuova colonna in cui si calcolerà la grandezza  $2x/t^2$  espressa in  $m/s^2$ .

• I primi dati (celle su sfondo verde) sono affetti da un'incertezza relativa molto grande, in quanto lo spostamento iniziale del corpo (differenza tra x consecutive) è dell'ordine dei millimetri o di pochi centimetri.

t (s)	x (m)	2x/t^2 (m/s^2)
0.00E+00	-1.17E-03	, i
3.33E-02	1.75E-03	3.155171595
6.67E-02	4.27E-03	1.9193988063
1.00E-01	9.93E-03	1.9861006062
1.33E-01	1.76E-02	1.9798256676
1.67E-01	2.37E-02	1.706545831
2.00E-01	3.55E-02	1.772939387
2.33E-01	4.78E-02	1.7549097165
2.67E-01	6.16E-02	1.7322574026
3.00E-01	7.49E-02	1.664988756
3.33E-01	9.00E-02	1.6206335065
3.67E-01	1.09E-01	1.6166933298
4.00E-01	1.31E-01	1.6313535138
4.33E-01	1.51E-01	1.6046188639
4.67E-01	1.73E-01	1.5897189671
5.00E-01	1.98E-01	1.581841928
5.33E-01	2.21E-01	1.5524534379
5.67E-01	2.50E-01	1.558911413
6.00E-01	2.79E-01	1.5500456222
6.33E-01	3.09E-01	1.5396791676
6.67E-01	3.33E-01	1.4983574943
7.00E-01	3.62E-01	1.47853734

• Trascurando questi dati e considerando solo i valori di a su sfondo azzurro, possiamo valutare il valor medio di a che dovrà risultare prossimo al valore ottenuto tramite il fit effettuato con Tracker.

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a_i \tag{6}$$

N indica il numero di dati a disposizione,  $a_i$  il generico valore dell'accelerazione calcolato nelle righe della colonna  $2x/t^2$ .

• L'incertezza di a sarà la deviazione standard della colonna di valori  $2x/t^2$ .

$$\delta a = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (a_i - \overline{a})^2}$$

• L'accelerazione del corpo sarà dunque espressa dal valore ottenuto con il fit di Tracker e dall'incertezza appena calcolata.

Per completare l'esperienza, calcoliamo l'incertezza dell'accelerazione di attrito

$$a_{attr.} = g \cdot sin\theta - a$$
. (7)

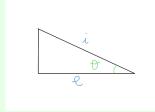
### Attività 1. Stima della incertezza dell'accelerazione di attrito.

- Come si vede dalla relazione (7) l'incertezza sulla  $a_{attr.}$  sarà dovuta alla propagazione dell'errore di  $\theta$  e di a (sulla pagina del sito trovate un breve VIDEO che riprende la tecnica di calcolo dell'incertezza attraverso la differenziazione).
- Attenzione: ricordarsi di usare valori degli angoli espressi in radianti in quanto le consuete regole di derivazione per le funzioni goniometriche sono tali solo nel caso in cui gli angoli siano espresso in radianti.
- Per determinare l'incertezza su  $\theta$  possiamo seguire due vie a seconda di come è stato misurato l'angolo. 1. Nel caso l'angolo sia la media di due misurazioni con lo smartphone, si potrà considerare come incertezza la semi-dispersione delle 2 misure:

$$\delta\theta = \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{2}.\tag{8}$$

2. Nel caso l'angolo sia stato stabilito a partire dalla misura delle lati di un triangolo rettangolo, si dovrà propagare l'errore delle misure dei lati sull'angolo. Per esempio se l'angolo è stato misurato tramite la

$$l = i\cos(\theta) \tag{9}$$



Si potrà differenziare la (9) e ricavare  $\delta\theta$  rispetto a  $\delta l$  e  $\delta i$ , che sono note. Esse saranno in prima approssimazione uguali all'errore strumentale.

 Al termine di questi calcoli si esprimerà l'accelerazione di attrito come

$$a_{attrito} = (g \cdot sin\theta - a) \pm \delta a_{attr.}$$
 (10)

## Attività 2. Determinazione dell'accelerazione con il metodo dei minimi quadrati.

Per svolgere questa attività è necessario che precedentemente sia stata effettuata l'operazione di tracciamento del corpo con Tracker (vedi sezione Attività 1. L'Analisi con Tracker). Il punto di partenza è costituito dai dati tempo, posizione che appaiono nelle colonne in basso a destra nella usuale schermata principale di Tracker.

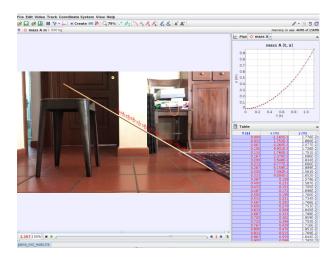


Figure 2: La schermata principale di Tracker, così come appare dopo l'operazione di tracciamento del punto materiale associato al corpo. In basso a destra le colonne dati (tempo, posizione).

Con il metodo dei minimi quadrati determineremo i parametri dell'equazione della retta che esprime la relazione tra la posizione x e il tempo al quadrato  $t^2$ .

In pratica abbiamo un andamento teorico atteso

$$x = \frac{1}{2}at^2\tag{11}$$

e vogliamo renderlo lineare per poi applicare il metodo dei minimi quadrati. Per poter trattare la relazione quadratica (11) come una relazione lineare occorre stabilire le corrispondenze mostrate in figura (3) e considerare la posizione una y, il tempo al quadrato una ascissa x e il coefficiente di  $t^2$  una pendenza:

$$x \to y$$
,  $\frac{1}{2}a \to c$ ,  $t^2 \to x$ . (12)

In tal modo la relazione teorica attesa diventa del tipo

$$y = cx + b \tag{13}$$

e con il metodo dei minimi quadrati cercheremo di determinare i parametri c e b che meglio si adattano ai dati sperimentali. Attenzione a non fare confusione, a destra di queste corrispondenze stanno le grandezze fisiche del nostro piano inclinato (posizione,

$$x = \frac{1}{2} \alpha t^{2}$$

$$y = c x + b$$

Figure 3: Schema delle corrispondenze tra le varibili fisiche e quelle tipiche del metodo dei minimi quadrati.

(accelerazione)/2 e (tempo)<sup>2</sup>) a sinistra le grandezze che useremo per applicare il metodo dei minimi quadrati. Una volta determinati i parametri c e b con le loro incertezze potremo procedere a valutare l'accelerazione del corpo e l'incertezza sull'accelerazione.

Possiamo interpretare quanto stiamo per fare anche da un punto di vista geometrico. Ci accingiamo a rappresentare graficamente i nostri dati su un piano cartesiano  $(t^2, x)$ .

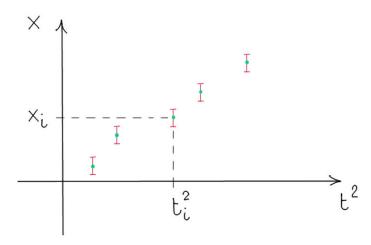


Figure 4: Rappresentazione grafica dei dati su un piano  $(t^2, x)$ .

Con il metodo dei minimi quadrati andremo alla ricerca della retta che meglio si adatta ai dati e ne determineremo il valore della pendenza c e dell'intercetta b (che ci aspettiamo prossima a zero).

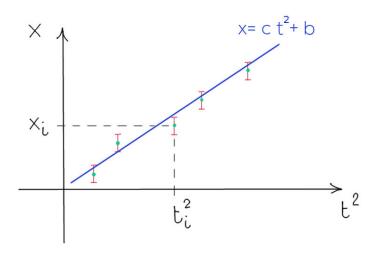


Figure 5: Con il metodo dei minimi quadrati troviamo l'equazione della retta che meglio si adatta ai nostri dati sperimentali.

## Attività 2. Il metodo dei minimi quadrati: calcolo dei parametri $c \in b$ .

- L'obiettivo da cogliere è la determinazione della retta che meglio si adatta ai nostri dati sperimentali  $(t_i^2, x_i)$ . In particolare trovare i valori di c e di b che definiscono tale retta.
- Il pedice *i* varia da 1 a *N*, dove *N* rappresenta il numero di dati raccolti con Tracker.
- Da qui in avanti indicheremo i valori della variabile indipendente  $t_i^2$  con il simbolo  $x_i$ , essa infatti rappresenta le ascisse dei nostri dati. La variabile dipendente  $x_i$  sarà indicata dal simbolo  $y_i$ .
- La teoria ci dice che per determinare i 2 parametri c e b, occorre calcolare 4 grandezze:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{i} , \sum_{i=1}^{N} y_{i} , \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} , \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i}$$

- Un foglio di calcolo (Excel, Libre Office, ...) può aiutarci molto nel raggiungere il nostro obiettivo. Per prima cosa possiamo definire due colonne di dati. Una per le  $x_i$ , l'altra per le  $y_i$ .
- Adesso riempiamo 2 nuove colonne. In una, al fianco delle colonne dati, calcoleremo  $x_i^2$ , nella successiva il prodotto  $x_i y_i$ .
- A questo punto dovremmo avere 4 colonne di valori numerici. Nella prima avremo i valori di  $x_i$ , nella seconda il valori  $y_i$ , nella terza gli  $x_i^2$ , nella quarta gli  $x_i y_i$ .
- Per non confonderci lasciamo una riga vuota sotto queste 4 colonne e nella riga successiva calcoliamo le somme di tutti gli elementi soprastanti. Così, per esempio, sotto la colonna degli  $x_i$  valuteremo la  $\sum_{i=1}^{N} x_i$ .

Ora non resta che calcolare i valori dei parametri *c* e *b* della retta che rappresenterà il legame lineare tra le nostre variabili. Dovremo utilizzare queste formule (tutte le sommatorie sono da intendersi con *i* che va da 1 a *N*):

$$\Delta = N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 \tag{14}$$

$$c = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta}$$
 (15)

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta}$$
 (16)

A questo punto dovremmo aver trovato i parametri c e b che definiscono la retta che meglio si adatta ai nostri dati. Possiamo rappresentarla in sovrapposizione al grafico dei punti sperimentali. In questo modo otterremo un grafico analogo a quello di figura (5). Analizzandolo avremo modo di fare subito due controlli grezzi sui calcoli svolti fino ad ora:

- 1. La retta disegnata dovrebbe adattarsi ai nostri punti sperimentali. Se essa passa lontano da essi o manifesta una pendenza in vistoso disaccordo con quella che i dati sperimentali lasciano intravedere, probabilmente qualche calcolo ci sarà sfuggito di mano.
- 2. Il modello teorico ci dice che la relazione lineare tra x e  $t^2$  è espressa da una retta che passa per l'origine. Ci aspettiamo quindi un piccolo valore per il parametro b. Altro campanello di allarme, allora, giungerà da eventuali valori dell'intercetta vistosamente diversi da zero.

Effettuati questi controlli, andiamo avanti con l'analisi. Adesso è fondamentale calcolare l'incertezza con cui abbiamo stimato la pendenza c e l'intercetta b della retta. Il motivo, ad esempio, è che useremo il valore di c per stimare l'accelerazione a del corpo, avremo dunque bisogno dell'incertezza di c per poi propagarla sull'incertezza dell'accelerazione.

## Attività 2. Il metodo dei minimi quadrati: l'incertezza di c e di

• Le incertezze sui parametri si valutano con queste formule:

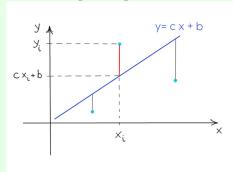
$$\delta c = \delta y \sqrt{\frac{N}{\Lambda}}$$
 ,  $\delta b = \delta y \sqrt{\frac{1}{\Lambda} \sum x_i^2}$  (17)

dove  $\delta y$  rappresenta l'incertezza sulle ordinate sperimentali, cioè sulle varie posizioni  $x_i$  assunte dal corpo durante il suo moto di discesa. Per capirci, quelle indicate dalle barre di errore rosse in figura (4).

• L'incertezza  $\delta y$  può essere calcolata usando questa relazione

$$\delta y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} (cx_i + b - y_i)^2},$$
 (18)

che esprime una sorta di valor medio dello scarto quadratico tra la retta trovata e i punti sperimentali. Osservando la figura sottostante, infatti, si nota che la differenza ad argomento della sommatoria è, in modulo, la lunghezza del segmento rosso: la distanza in ordinata tra punto sperimentale e retta.



Avendo trovato le incertezze sui parametri della retta che meglio si adatta ai punti sperimentali, possiamo raffinare il nostro controllo sui risultati dell'analisi. Come detto prima, ci aspettiamo che b abbia un valore prossimo a zero. Adesso siamo in grado di verificare se il range di variabilità del parametro b, cioè l'intervallo  $[b-\delta b,b+\delta b]$ contenga al suo interno lo zero.

Detto questo, passiamo alla fase finale, ovvero alla stima del valore di *a* a partire dalla pendenza *c* della retta.

### Attività 3. Calcolo di g e della sua incertezza.

Come già ricordato più volte, dalla teoria sappiamo che la relazione tra x e  $t^2$  è espressa dall'equazione

$$x = \frac{1}{2}at^2. (19)$$

Adesso, però, abbiamo in mano una stima del coefficiente angolare di questa relazione: il parametro c. Possiamo quindi scrivere

$$c = \frac{1}{2}a\tag{20}$$

e da questa equazione possiamo ricavare il valore di a. Procediamo:

• Calcoliamo *a* usando il valore del parametro trovato con i minimi quadrati:

$$a = 2c. (21)$$

- Tramite l'incertezza di c (17) valutiamo l'incertezza  $\delta a$  sul valore di a. A tal fine si usa la consueta tecnica di calcolo per la propagazione dell'errore.
- Concludiamo, esprimendo il valore numerico di *a* ottenuto con questa procedura:

$$a = 2c \pm \delta a. \tag{22}$$

# Attività 2. Determinazione dell'accelerazione di attrito e del coefficiente di attrito.

Possiamo sfruttare i risultati ottenuti con il metodo dei minimi quadrati per calcolare l'accelerazione d'attrito e il coefficiente di attrito dinamico.

L'accelerazione dovuta all'attrito è data dalla espressione

$$a_{attr.} = g \cdot \sin\theta - a \,, \tag{23}$$

che possiamo valutare usando il valore di a ottenuto con i minimi quadrati, il valore di  $\theta$  misurato e assegnando a g il valore misurato, per esempio, con l'esperienza del pendolo. L'incertezza su  $a_{attr.}$  sarà stimata propagando gli errori di g,  $\theta$  e a (sulla pagina del sito trovate un breve VIDEO che riprende la tecnica di calcolo dell'incertezza attraverso la differenziazione). Come sempre, **attenzione**, in fase di calcolo della propagazione dell'incertezza, a esprimere l'angolo in radianti!

Per quanto riguarda il coefficiente di attrito dinamico  $\mu_D$ , ricordiamo che

$$a = g \sin\theta - \mu_D g \cos\theta \tag{24}$$

Esplicitando il coefficiente di attrito dalla (24) possiamo stimarne il valore. Propagando le incertezze di g,  $\theta$ , a, si giunge all'incertezza  $\delta a_{attr.}$ .